

Estudo de Estabilidade no Escoamento ao Redor de um Cilindro

José Ignacio Hernández López *, Julio R. Meneghini , J.A.P. Aranha

¹NDF

Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Av. Prof. Mello Moraes, 2231, 05508-900 São Paulo, SP

jignaciohl@msn.com, jmeneg@usp.com, japaran@usp.br

Resumo. O propósito principal deste estudo é o cálculo do problema linear de estabilidade para o escoamento simétrico ao redor de um cilindro circular. É empregado o método de Usawa, baseado na triangulação do domínio com elementos isoparamétricos (elemento de Taylor Hood: velocidade quadrática e pressão linear), para encontrar a solução aproximada das equações de Navier-Stokes; e o Método das Bases Solenoidais em Elementos Finitos (DFEM), para encontrar uma base do subespaço solenoidal discreto. O problema linear de estabilidade é embutido no subespaço solenoidal. Neste trabalho é calculado o espectro completo da matriz jacobiana, para o problema de estabilidade do escoamento incompressível ao redor de um cilindro. O espectro tem uma forma topológica semelhante a uma parábola. O Reynolds crítico neste cálculo está na faixa de $47 < Re_c = 47,5 < 48$. O número de Strouhal calculado é $S_t = \frac{\omega D}{2\pi U} = 0,1374$.

Abstract. The principal purpose of this study is the calculation of the linear stability problem of the symmetric flow past a circular cylinder. We employed the Usawa method, based on the triangulation of the domain with isoparametric elements (Taylor-Hood element: quadratic velocity and linear pressure), to find the approximate solution of the discrete Navier-Stokes equation; and the Divergence Free Finite Element method (DFEM) to find a basis of the solenoidal discrete subspace. The linear stability problem is embedded in the solenoidal subspace. In this work we calculate the complete spectrum of the jacobian matrix for the stability problem of incompressible flow around a cylinder. The spectrum have a topological form similar to a parabola. The critical Reynolds number in our calculation is in the range of $47 < Re_c = 47,5 < 48$. The Strouhal number calculated is $S_t = \frac{\omega D}{2\pi U} = 0,1374$.

1. Introdução

Este trabalho teve como motivação aprofundar a fundamentação teórica do fenômeno de "Vortex-induced vibration", (VIV), que corresponde à emissão de vórtices no escoamento ao redor de um cilindro. O fenômeno de desprendimento de vórtices ("vortex-shedding") têm um importante papel dentro do VIV e representa em si um problema clássico de estabilidade onde a solução estacionária das equações de Navier-Stokes do escoamento ao redor de um cilindro circular deixam de ser estáveis, devido a uma bifurcação supercrítica de Hopf (na

*Este trabalho foi financiado pela CAPES e PETROBRAS.

nomenclatura dos sistemas dinâmicos). Segundo Aranha(2003) os primeiros modelos preditivos utilizados no estudo de VIV, denominados modelos fenomenológicos, resvalam em um tema conexo ao da estabilidade de Hopf. Todos esses modelos baseiam-se na equação de Van der Pol e possuem uma capacidade preditiva invejável, ainda mais quando comparados com as predições diretas que se obtêm através de simulações numéricas (CFD). Esses modelos encontram dois problemas que parecem intransponíveis: primeiro, eles traduzem a interação hidro-elástica com uma física muito simplificada; segundo, os coeficientes desses modelos são extraídos de um certo conjunto de experimentos e, por isso, eles podem ser utilizados no máximo como interpoladores, dificilmente como extrapoladores para uma situação muito distinta daquela que correspondem aos experimentos onde se apóiam.

A bifurcação transforma o campo estacionário de velocidades num campo oscilatório cuja dinâmica é um ciclo limite. Capturar esta primeira bifurcação é o primeiro passo para obter uma compreensão mais apurada do ponto de vista conceptual e científico do fenômeno de "vortex-shedding" e, indiretamente, do fenômeno de VIV.

2. O escoamento ao redor de um cilindro

O escoamento ao redor de um cilindro é considerado de dinâmica mais rica dentro dos casos típicos de escoamentos incompressíveis, (Meneghini, 2002). Quando um cilindro circular de diâmetro D e comprimento L é colocado num escoamento uniforme, com velocidade U_∞ , uma esteira é gerada a jusante do cilindro que é controlada por dois parâmetros: o número de Reynolds $Re = (U_\infty D / \nu)$, (onde ν é a viscosidade cinemática) e a razão de aspecto: L/D . Entretanto, ao considerar um cilindro bidimensional infinito, $L/D = \infty$, o escoamento é controlado unicamente pelo número de Reynolds, Re .

À medida que Re é incrementado aparecem diversos regimes para os escoamentos que se formam ao redor de um cilindro. Para $Re \leq 1$, ocorre o escoamento estacionário e lento ("creeping flow"), o qual é descrito teoricamente pela solução das equações de Stokes (Batchelor, 1990). Para $Re > 5$ ou 6, o escoamento permanece estacionário mas aparece uma pequena região de recirculação composta por dois vórtices estacionários que rodam em sentidos opostos na parte a jusante do cilindro. Para $Re > Re_C = 45$ (valor crítico de Reynolds), o escoamento sofre uma transição para um estado oscilatório que toma a forma da conhecida esteira de Karman: duas filas de vórtices rodando em direções opostas são desprendidas do cilindro.

O espectro de frequência da esteira mostra um pico diferenciado na frequência fundamental, f . O número de Strouhal $S_t = fD/U_\infty$ se eleva com o número de Reynolds, (Williamson, 1989), alcançando o valor máximo aproximado, $S_t = 0.2$, para $Re \simeq 200$. A estrutura espaço-temporal responsável por esta mudança qualitativa no comportamento é um modo global auto-sustentável e periódico no tempo (Provansal *et al.*, 1987). Esta bifurcação que acontece no escoamento é conhecida como de Hopf, sendo a amplitude do ciclo limite da ordem $(Re - Re_C)^{1/2}$ (Provansal *et al.*, 1987).

3. Estabilidade Hidrodinâmica

O objetivo da hidrodinâmica é descrever e prever os movimentos dos fluidos submetidos à aplicação das forças. Para os fluidos incompressíveis, no caso particular das equações de Navier-Stokes, estas forças relacionam-se com o número de Reynolds. Quando este é pequeno existe uma correspondência única entre as forças internas e da fronteira com os movimentos previstos. Na medida em que o número de Reynolds cresce, o problema torna-se complexo com

muitas soluções, o que traduzido numa linguagem mais matemática equivale ao domínio da não unicidade nas soluções.

Neste capítulo são desenvolvidos os conceitos da teoria da estabilidade hidrodinâmica que se relacionam diretamente com o objetivo principal do trabalho: o estudo da estabilidade do escoamento ao redor de um cilindro. O material aqui exposto é válido para aqueles escoamentos que satisfazem as equações de Navier-Stokes e além disso, obedecem o critério de incompressibilidade: conservação de massa.

4. Instabilidade e transição

Quando o escoamento evolui no tempo, sendo o Reynolds pequeno, este é univocamente determinado pelos dados, independente das condições iniciais. Este escoamento único possui o máximo de simetria consistente com os dados. Para grandes números de Reynolds perde-se a unicidade e outros escoamentos são observados com outras estruturas de simetria. Por exemplo, movimentos que são estacionários podem ser substituídos por movimentos periódicos, quase-periódicos ou aperiódicos. Portanto, deve-se ressaltar que para grandes valores do número de Reynolds se observam escoamentos que não seguem a simetria imposta pelos dados. Nos escoamentos turbulentos a quebra de simetria é dramática: portanto nesses escoamentos a quebra entre os dados e o fluxo (dinâmica) é muito elusiva.

Um das idéias preponderantes a respeito das tentativas de explicar este processo de transição a turbulência, baseia-se numa sequência de bifurcações (Landau and Lifschitz, 1959). Landau e Hopf fundamentaram sua teoria em conjecturas, que se derivam de uma sucessiva perda da estabilidade das soluções em relação a pequenas perturbações (Georgescu, 1985).

Para Re pequenos existe um escoamento estacionário: $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, Re)$, e o campo escalar: $p = p[\mathbf{U}]$. A evolução das perturbações \mathbf{u} de \mathbf{U} é regida pela equação que na forma compacta é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, Re) - \nabla p, \quad \mathbf{u} \in H; \quad (1)$$

onde:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, Re) = \mathbf{F}_u(0, Re | \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}; \quad (2)$$

e:

$$\mathbf{F}_u(0, Re | \mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} - \bar{\mathbf{U}}(Re) \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\mathbf{U}}(Re); \quad (3)$$

O operador linear que é a derivada do operador $\mathbf{F}(\mathbf{u}, Re)$, com o termo não-linear $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$ é conhecido como operador de Fréchet. Como: $\mathbf{F}(0, Re) = 0$, então, $\mathbf{u} = 0$ e $p[0] = 0$ são soluções da equação (1) para todo Re . Quando \mathbf{u} é suficiente pequeno podemos estudar as condições de estabilidade para o campo estacionário $\bar{\mathbf{U}}$, segundo o problema linearizado:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}_u(0, Re | \mathbf{u}) - \nabla p, \quad \mathbf{u} \in H; \quad (4)$$

no qual baseia-se toda a teoria hidrodinâmica de estabilidade linear. Aqui eliminou-se o termo não-linear $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$.

Agora pode-se tentar as soluções tipo modos normais (Georgescu, 1985; Joseph, 1985), sendo que:

$$\mathbf{u} = e^{\sigma t} \zeta, \quad (5)$$

$$p[\mathbf{u}] = e^{\sigma t} p[\zeta], \quad (6)$$

onde $\zeta \in H$ resolve (4) se ζ e

$$\sigma(Re) = \xi(Re) + i\eta(Re), \quad (7)$$

resolve o problema espectral dado por:

$$\sigma\zeta = \mathbf{F}_u(0, Re | \zeta) - \nabla p[\zeta], \quad \zeta \in H; \quad (8)$$

Quando Ω é um domínio limitado, existe um número infinito numerável de autovalores isolados $\sigma(Re)$ e todos eles estão localizados dentro de uma parábola aberta, na parte mais negativa do plano complexo (Joseph, 1985). A estabilidade do campo médio $\bar{\mathbf{U}}$ pode ser determinada pelo problema espectral: $\bar{\mathbf{U}}$ é condicionalmente estável se para todos os autovalores se cumpre que: $\xi(Re) < 0$ e é instável se: $\xi(Re) > 0$ para algum autovalor.

Condicionamente estável significa estabilidade em relação a pequenas perturbações: um escoamento condicionalmente estável pode ser instável para grandes perturbações, cuja evolução não é governada pela teoria linear (Georgescu, 1985). À medida que o Re é incrementado existe um valor crítico de Reynolds Re_C para o qual: $\xi(Re_C) = 0$, isto para alguns autovalores. Se: $\eta(Re_C) \equiv \omega_0 \neq 0$, então: $\pm i\omega_0$ são autovalores iguais de \mathbf{F}_u com autovetores ζ e o complexo conjugado $\bar{\zeta}$. Em geral, passam um par complexo conjugado de autovalores no semiplano positivo complexo, quando o Reynolds é incrementado e passa ao valor crítico Re_C . Na situação descrita, a perda de estabilidade de $\bar{\mathbf{U}}$ implica a existência de uma nova solução $\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}$, que se bifurca a partir de $\bar{\mathbf{U}}$. Este tipo de bifurcação, onde passam um par de autovalores conjugados é conhecida como bifurcação de Hopf (Joseph, 1985).

Basicamente, este trabalho de pesquisa se fundamenta neste substrato teórico. O principal problema que persiste é que não existem, até hoje, soluções exatas para o caso particular do escoamento ao redor de um cilindro. O que resta esclarecer é o significado do problema abstrato de autovalores (8), ou seja, tentar uma representação discreta do mesmo e procurar por uma solução aproximada. É precisamente sobre esse tema que tratam os próximos capítulos.

5. Estabilidade Hidrodinâmica Fraca

Nesta seção é tratada a formulação fraca para o problema de estabilidade. Igualmente como as equações de Navier-Stokes existe uma forma fraca bem estabelecida que se desprende do problema formal de estabilidade hidrodinâmica para o caso em estudo. Esta forma está bem estudada (Gunzburger and Nicolaidis, 1993; Joseph, 1985; Georgescu, 1985), e é independente aos poucos casos particulares onde os métodos analíticos tiveram sucesso.

Quando discretizado o problema de autovalores generalizado, equação (4), resulta nas equações (Gunzburger and Nicolaidis, 1993):

$$\sigma(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{v}^h, p^h) + c(\mathbf{U}, \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + c(\mathbf{u}^h, \mathbf{U}, \mathbf{v}^h) = 0, \quad (9)$$

$$b(\mathbf{u}^h, q^h) = 0, \quad (10)$$

onde as formas bilineares e trilineares estão bem estudadas (Gunzburger and Nicolaidis, 1993), e as funções \mathbf{v}^h e q^h pertencem aos espaços \mathbf{V}_0^h e S_0^h . No processo de discretização, primeiramente particiona-se Ω com uma malha de elementos finitos Γ_h , os quais consistem em triângulos. Nessa malha define-se os espaços:

$$\mathbf{X}_h^2 = \{w_h \in \mathbf{C}^0(\Omega) \mid w_h|_K \in \mathbf{P}_2(K), \forall K \in \Gamma_h\}, \quad (11)$$

onde é possível construir duas aproximações conformes de $\mathbf{H}_0^1 \times L_0^2$, denominadas $\mathbf{V}_0^h \times S_0^h$, onde $\mathbf{V}_0^h = (\mathbf{X}_h^2)^2 \cap \mathbf{H}_0^1$ e $S_0^h = \mathbf{X}_h^1$, este é o elemento conhecido de Taylor-Hood (P2P1) (Bathe, 1996; Zienkiewicz and Taylor, 1991).

Empregando elementos finitos para resolver (9) e (10) obtém-se um problema generalizado de autovalores. Seja $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ o vetor dos graus de liberdade nodais, para a perturbação nas velocidades \mathbf{u} e nas pressões $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$, o vetor dos graus de liberdade que definem as perturbações nas pressões p . A forma discretizada de (9) e (10) é:

$$\begin{pmatrix} A + L(\mathbf{U}) & -R \\ R^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad (12)$$

onde A é $(n \times n)$ a matriz de difusão esparsa, a matriz $L(\mathbf{U})$ não simétrica de ordem $(n \times n)$ é a soma dos termos convectivos, $-R$ é a matriz gradiente discreta de ordem $(n \times m)$ e posto m , R^T é a divergência discreta $(m \times n)$, e M é a matriz simétrica de massa, de ordem $(n \times n)$. O problema de autovalores (12) é real e não-simétrico, então, os autovalores são reais ou em pares complexos conjugados (Fortin *et al.*, 1997; Gunzburger and Nicolaidis, 1993). É de interesse o espectro da matriz $A + L(\mathbf{U})$, para calcular os autovetores e autovalores da restrição do operador $A + L(\mathbf{U})$ ao subespaço \mathbb{Z} .

5.1. Matriz de massa Generalizada

O problema generalizado de autovalores (12) possui uma matriz de massa generalizada:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Como pode-se notar esta matriz é singular. Essa singularidade em problemas discretos generalizados de autovalores com matrizes de massa que não são positivas definidas é a principal causa de que a exploração do subespaço solenoidal, como suporte para estudos de estabilidade hidrodinâmica, seja um problema atual que sobreviveu ao passar do tempo. De tal sorte que, não há na literatura trabalhos onde se estuda algum tipo de estabilidade hidrodinâmica fazendo uso explícito das virtudes deste subespaço. A singularidade desta matriz tem contribuído de forma expressiva para que a formulação ou o tratamento para problemas de estabilidade hidrodinâmica, em variáveis primitivas seja deixado de lado nos últimos tempos (Fortin *et al.*, 1997); favorecendo a linha do operador de Orr-Sommerfield.

A principal virtude de projetar o problema generalizado de autovalores consiste precisamente em que esta singularidade desaparece e se trabalha com um problema usual onde a matriz de massa é positiva definida. Do ponto de vista dos métodos tradicionais para calcular autovalores e autovetores esta vantagem parece definitiva. A principal desvantagem está relacionada com o tamanho do subespaço solenoidal discreto.

6. Elementos Solenoidais

Existem três formas fundamentais de inverter o sistema linear esparso resultante do processo de discretização para as equações de Navier-Stokes (Gunzburger and Nicolaidis, 1993; Cuvelier *et al.*, 1986):

- Integração direta.
- Método de penalidade.
- Subespaço solenoidal.

Cada método possui suas próprias desvantagens: o primeiro tem um grande custo computacional, pois as técnicas de inversão diretas demandam muita memória; o segundo requer a introdução de um parâmetro grande, cujo valor é sujeito a um estudo de experimentação numérica prolongado; e o terceiro, é baseado na construção de bases solenoidais para o subespaço nulo do operador

divergência e possui um elevado grau de dificuldade na obtenção das bases, pois a metodologia para obtê-las ainda não está suficientemente desenvolvida. A aplicação da terceira técnica desacopla o campo de pressões do campo de velocidades, sem a necessidade de introduzir parâmetros artificiais adicionais. O sistema resultante pela terceira via é menor no que se refere aos graus de liberdade dos outros (Cuvelier *et al.*, 1986).

Para muitas aplicações, em especial o caso dos escoamentos incompressíveis, a equação de conservação de massa $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ exige que o campo de velocidades discreto $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}$. Isto significa que o campo de velocidades discretos é pelo menos, no sentido fraco, solenoidal. De modo geral $\mathbb{Z}^h \not\subseteq \mathbb{Z}$ (Gunzburger and Nicolaidis, 1993), mas deve-se selecionar o espaço de elementos finitos \mathbf{V}_0^h tal que, as funções que pertencem a \mathbf{V}_0^h sejam ao menos fracamente solenoidais, ou seja, $\mathbf{V}_0^h \subset \mathbb{Z}$. Adicionalmente estes elementos causam uma grande simplificação, pois a determinação da velocidade é desacoplada em relação a pressão. Como $\mathbf{V}_0^h \subset \mathbb{Z}$, isto implica que, $\mathbb{Z}^h = \mathbf{V}_0^h$, é necessário resolver para o campo de velocidades \mathbf{u}^h a seguinte equação:

$$a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + c(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h), \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_0^h \quad (14)$$

Utilizando a representação matricial das equações de Navier-Stokes:

$$\begin{pmatrix} A & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (15)$$

onde a matriz A representa a soma das matrizes convectiva e difusiva. Todo o problema da projeção solenoidal destas equações, se reduz em encontrar uma base T do espaço nulo da matriz divergência discreta R^T . Supondo que T possui colunas que formam a base para o subespaço nulo de R^T . Como: $\mathbf{U} = T \mathbf{V}$ e como: $\mathbf{V} \in \ker R^T$ então:

$$T^T R \mathbf{P} = R^T T \mathbf{P} = 0, \quad (16)$$

até que a equação projetada no subespaço solenoidal seja:

$$(T^T A T) \mathbf{V} = T^T \mathbf{F} \quad (17)$$

Como (17) é resolvida para \mathbf{V} o campo discreto de velocidades é recuperado de:

$$\mathbf{U} = T \mathbf{V} \quad (18)$$

A vantagem deste procedimento consiste em que representa uma redução significativa do esforço para se obter a solução do problema (Brezzi and Fortin, 1991; Gunzburger and Nicolaidis, 1993; Cuvelier *et al.*, 1986).

7. Subespaço nulo do operador divergência

Um aspecto muito importante consiste em encontrar uma base para o subespaço nulo do operador divergência. Tal e como visto anteriormente, representando $\mathbf{u} = \{\beta_k\}$ e $\mathbf{q} = \{q_j\}$, temos que:

$$b(\mathbf{u}^h, p^h) = \langle R^T \mathbf{u}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{R}^J} = \langle \mathbf{u}, R \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{R}^K}. \quad (19)$$

São necessárias as matrizes S e T associadas ao produto interno dos espaços \mathbf{V}^h e \mathbf{S}^h .

Seja:

$$s_{ij} = ((q_i, q_j))_{S^h}, \quad 1 \leq i, j \leq J, \quad (20)$$

$$t_{ij} = ((\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j))_{\mathbf{V}^h}, \quad 1 \leq i, j \leq K. \quad (21)$$

usando as mesmas notações temos:

$$\|\mathbf{u}^h\|_{\mathbf{V}^h}^2 = \langle T\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^K} \quad (22)$$

$$\|q^h\|_{S^h}^2 = \langle S\mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{R}^J}. \quad (23)$$

os operadores S e T podem ser considerados como isomorfismos para as cópias de \mathbb{R}^K e \mathbb{R}^J representando \mathbf{V}^h e S^h , em uma outra cópia nos espaços duais \mathbf{V}^{th} e S^{th} .

Considerando o problema singular generalizado de autovalores. Encontrar a base T de vetores ortonormais de \mathbb{R}^K , $\{\mathbf{u}_i \mid 1 \leq i \leq K\}$, e a base de vetores S ortonormais de \mathbb{R}^J , $\{\mathbf{q}_i \mid 1 \leq i \leq J\}$, tal que existem $\mu_i > 0$ que satisfazem:

$$R^T \cdot \mathbf{u}_i = \mu_i S \cdot \mathbf{q}_i, \quad \forall \mathbf{u}_i \in \ker R^T, \quad (24)$$

$$R \cdot \mathbf{q}_i = \mu_i T \cdot \mathbf{u}_i, \quad \forall \mathbf{q}_i \in \ker R, \quad (25)$$

É de interesse o caso em que $S = I$ e $T = I$, que é o caso clássico para a matriz R^T . Se: μ_i, \mathbf{u}_i e \mathbf{q}_i existem, então, a partir de (24) e (25) e representando por r o $rank(R^T)$ temos:

$$R^T \cdot T^{-1} \cdot R \mathbf{q}_i = \mu_i^2 S \cdot \mathbf{q}_i, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (26)$$

$$R \cdot S^{-1} \cdot R^T \mathbf{u}_i = \mu_i^2 T \cdot \mathbf{u}_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (27)$$

Estes são problemas generalizados de autovalores. A partir deles podem-se obter as bases desejadas dos subespaços nulos. Então, finalmente tem-se

$$R^T = S P \Sigma U^T T^T, \quad (28)$$

$$R = T U \Sigma P^T S^T, \quad (29)$$

onde U e P são matrizes formadas com os vetores colunas \mathbf{u}_i e \mathbf{q}_i , e Σ é uma matriz pseudo-diagonal de ordem $J \times K$, que contém os autovalores μ_i em sua diagonal principal.

Para o caso em que $S = I$ e $T = I$ no problema de autovalores (27) os autovalores nulos correspondem a um conjunto de autovetores, que constituem uma base do subespaço nulo do operador divergência. Esta base pode ser calculada por uma técnica tradicional de autovalores, se o problema não tiver excessivos graus de liberdade. Neste trabalho calcula-se esta base para o problema (27) considerando os graus de liberdade que correspondem aos nós na linha de simetria como livres.

Para o importante caso de introduzir simetria e anti-simetria no operador divergência, calculam-se os problemas simétricos (+) e anti-simétricos (-):

$$R^+ \cdot S^{-1} \cdot (R^+)^T \mathbf{u}_i = \mu_i^2 T \cdot \mathbf{u}_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (30)$$

$$R^- \cdot S^{-1} \cdot (R^-)^T \mathbf{u}_i = \mu_i^2 T \cdot \mathbf{u}_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (31)$$

com isto podem-se calcular ambas as bases para os subespaços nulos simétricos e anti-simétricos do operador divergência. Então, o problema linear de estabilidade se divide em dois: um problema simétrico e outro anti-simétrico. É de se esperar que o modo mais instável se encontre na parcela anti-simétrica (Aranha, 2001; Jackson, 1987).

8. Problema de Estabilidade

O problema de estabilidade hidrodinâmica para o escoamento incompressível ao redor do cilindro possui algumas características especiais, que geram grandes dificuldades na hora da implementação computacional dos algoritmos necessários para resolução. A seguir, são enumeradas algumas delas:

- Cada problema de estabilidade está constituído por dois problemas acoplados: cálculo do campo estacionário, cuja estabilidade pretende-se estudar, e o problema de autovalores que completa o estudo de estabilidade.
- Estes problemas anteriores possuem naturezas numéricas diferentes, o primeiro baseia-se na resolução de sistemas lineares esparsos, e o segundo se relaciona com o cálculo de autovalores e autovetores em sistemas indefinidos, devido ao qual não existem pacotes computacionais onde este acoplamento esteja naturalmente previsto.
- Existe grande desequilíbrio no avanço e disponibilidade de algoritmos e técnicas computacionais, que tratam o problema da inversão de sistemas lineares esparsos, e o problema de cálculo de autovalores para sistemas indefinidos. O desenvolvimento atual é favorável ao primeiro desses problemas.
- A barreira solenoidal tem erguido um grande inconveniente, como visto anteriormente, no avanço dos cálculos de estabilidade.
- Para calcular este problema generalizado de autovalores, assim como para o cálculo da base solenoidal, utilizamos as rotinas, disponíveis e incorporadas ao Matlab (Eig e Eigs), do Arpack, (Lehoucq *et al.*, 1997), e do Lapack, (Anderson *et al.*, 1999).

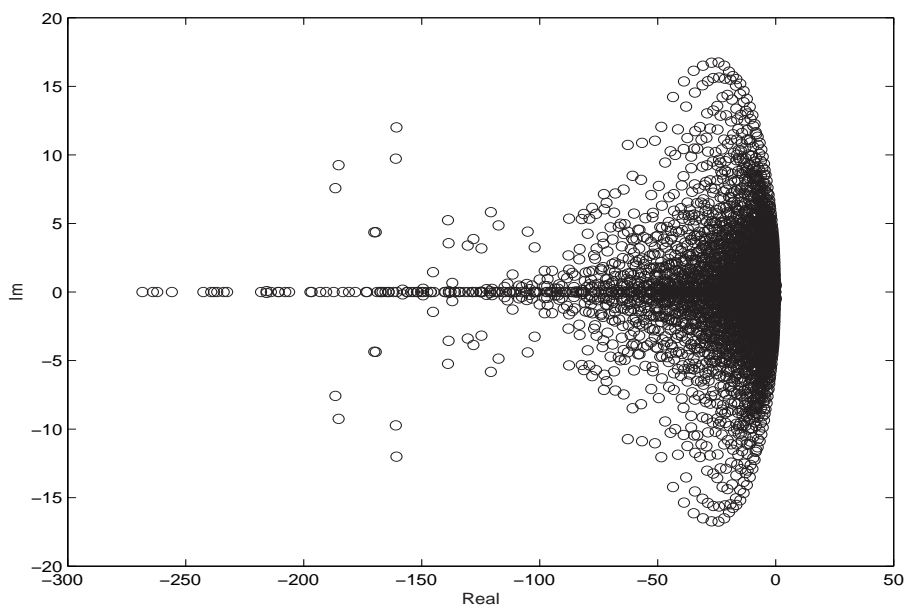


Figura 1: Espectro completo $Re=46,05$.

Nesta seção serão tratados os resultados, que constituem a principal busca deste trabalho e estão relacionados com o problema de estabilidade linear generalizado, para o escoamento simétrico ao redor de um cilindro circular. Uma vez tendo os principais ingredientes do problema de estabilidade na forma dos operadores discretizados, resolve-se o problema de autovalores generalizado. Espera-se que na solução deste problema, em forma dos pares autovalores-autovetores fosse possível localizar a bifurcação de Hopf.

Na figura (1) observa-se o espectro do problema generalizado de autovalores. Este espectro possui a forma parabólica tão mencionada na literatura (Georgescu, 1985; Gervais *et al.*, 1997). É um fato interessante a ressaltar, que normalmente nestes estudos não se consegue capturar o espectro completo do problema generalizado de estabilidade, pois o que se tenta é descobrir uma faixa próxima do eixo imaginário, onde encontram-se aqueles autovalores mais instáveis. A estrutura topológica deste espectro não tem sido reportada até o momento.

Na tabela (1) estão representadas as partes reais e imaginárias para os autovalores críticos

	<i>malha2</i>	<i>malha3</i>	<i>malha4</i>
P2P1	$\sigma = -0,0406$ $\omega = 0,4040$	$\sigma = 0,0284$ $\omega = 0,4710$	$\sigma = 0,0530$ $\omega = 0,4802$
$P2P1^+$	$\sigma = -0,0209$ $\omega = 0,4432$	$\sigma = 0,0369$ $\omega = 0,4753$	$\sigma = 0,0531$ $\omega = 0,4800$
$P2P1^D$	$\sigma = 0,0038$ $\omega = 0,4158$	$\sigma = 0,0366$ $\omega = 0,4739$	$\sigma = 0,0527$ $\omega = 0,4791$

Tabela 1: Parcelas Real (σ) e Imaginária (ω). Elementos: Quadrático-linear, Quadrático-linear com nó central e Descontínuo ($P2P1$, $P2P1^+$ e $P2P1^D$)

quando calculado o problema de estabilidade. Pode-se perceber um deslocamento destes

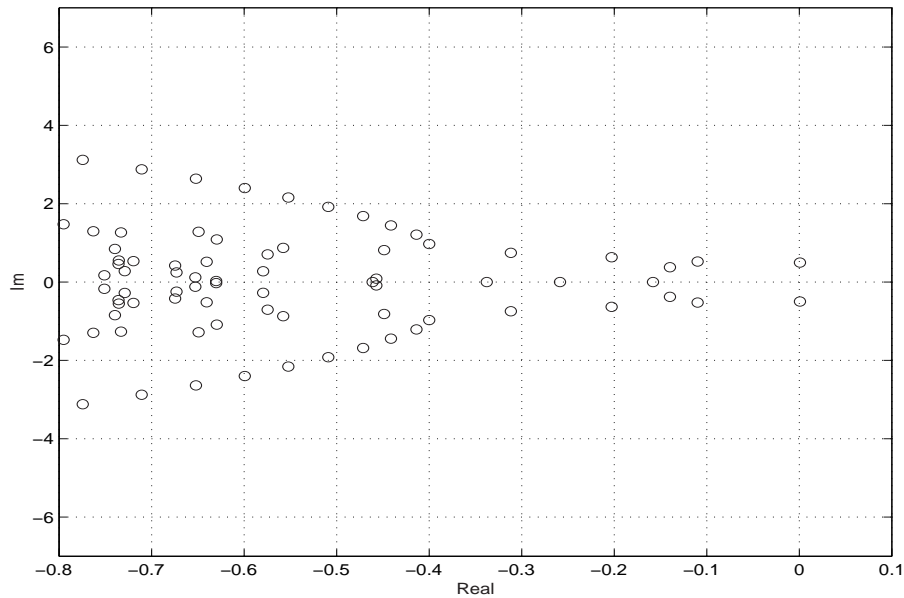


Figura 2: Espectro restrito as vizinhanças do eixo imaginário $Re=46,05$.

autovalores na região de instabilidade, à medida que o refinamento das malhas incrementa-se: este comportamento é típico dos problemas de autovalores e já foi reportado em (Gervais *et al.*, 1997; Fortin *et al.*, 1994). Na figura (2) observa-se uma ampliação do espectro, na região mais próxima ao par conjugado de autovalores, que fornece a bifurcação de Hopf, para o valor de Reynolds crítico que se encontra entre 46 e 46,05. Esta figura mostra que a bifurcação de Hopf acontece no subespaço solenoidal discreto gerado pelo elemento de Taylor-Hood, (Bathe, 1996).

A figura (3) representa a parte real do autovalor mais instável, para a faixa de Reynolds que compreende os valores de 40, 46, 46,05, e 50. O valor crítico está localizado entre os valores de 46 e 46,05, mas observando a razão de crescimento da parte real nesta faixa de Reynolds é fácil perceber que se cumpre a condição de transversalidade, (Winters, 1991; Joseph, 1985; Poliashenko and Aidun, 1995).

Na próxima figura (4) estão representados a parte imaginária dos autovalores mais instáveis, para os valores do número de Reynolds próximos a bifurcação de Hopf. Nesta figura pode-se apreciar a taxa de crescimento da frequência, nesta faixa de Reynolds.

A tabela (2) contém uma descrição dos principais trabalhos realizados na literatura, onde o problema de estabilidade linear é calculado, para o escoamento incompressível ao redor do

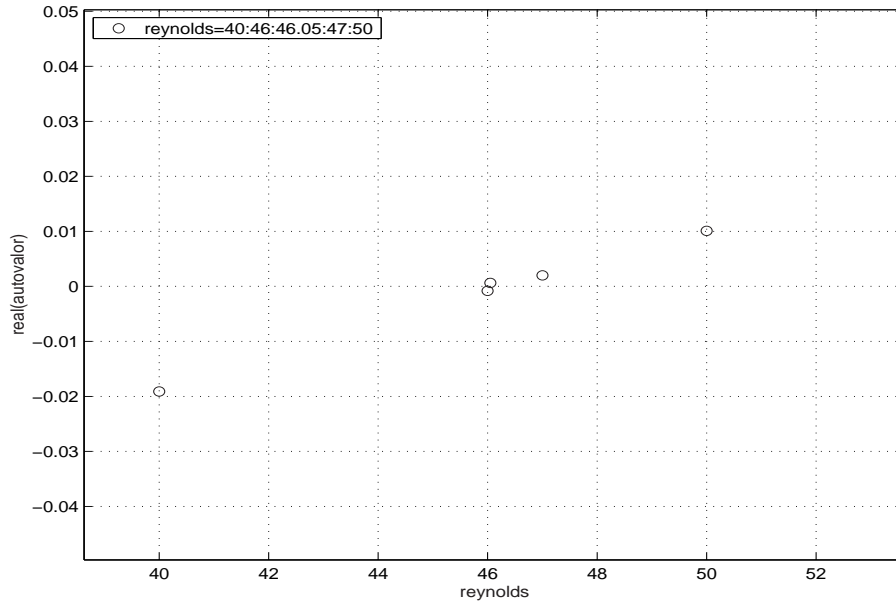


Figura 3: Parte real do autovalor mais significativo.

<i>Literatura</i>	St_c	Re_c	<i>Metodo</i>	<i>Malha</i>
(Jackson, 1987)	0,13626	45,403	FEM: N-Raph	3056
(Morzynski and Thiele, 1991)	0,13451	46,270	FDM: N-Raph	3200
(Williamson, 1989)	0,1220	47,90	Experimento	
(Berger and Wile, 1972)	0,12	50,0	Experimento	
(Gresho <i>et al.</i> , 1984)	0,14	50,0	FEM-2D	
(Chen <i>et al.</i> , 1995)	0,138	47,90	FEM: Iter-Sub	10000
(Ding and Kawahara, 1999)	0,12619	46,389	FEM: Arnoldi	9870
(Noack and Eckelmann, 1994)	0,149	54,0	Galerkin	63mdos:2D
Este trabalho	0,1374	47,5	FEM: sub-sole	3016

Tabela 2: Parâmetros: esta tabela é uma atualização de Ding (1999)

cilindro. Na segunda e terceira coluna encontram-se os valores do número de Strouhal e o Reynolds crítico, no qual o escoamento simétrico perde a estabilidade e ocorre a bifurcação. Pode-se apreciar observando cuidadosamente estas duas primeiras colunas, que o número de Strouhal obtido neste trabalho:

$$St_c = \frac{\omega D}{2\pi U} = 0,1374, \quad (32)$$

está bem próximo dos principais trabalhos enumerados na tabela. No que se refere ao número de Reynolds crítico $Re_c = 47,5$, acontece uma situação similar: encontra-se bem próximo do $Re_c = 48$ que é o valor aceito. Independentemente que existam evidências experimentais que caminhem na direção de uma diminuição do número de Reynolds crítico, será preciso por em prática novas idéias para conseguir capturar essa suposta diminuição no valor de Reynolds, onde a bifurcação acontece. Na quarta coluna da tabela (2) apresenta-se o nome da técnica numérica empregada para obter esses valores do problema de estabilidade, e na última a quantidade de graus de liberdade (nós) nas malhas usadas. É importante ressaltar a influência significativa do emprego de bases solenoidais nestes cálculos, a qual está associada a uma redução do valor crítico de Reynolds, a partir do qual o escoamento ao redor do cilindro perde a sua dinâmica estacionária e cai no ciclo limite.

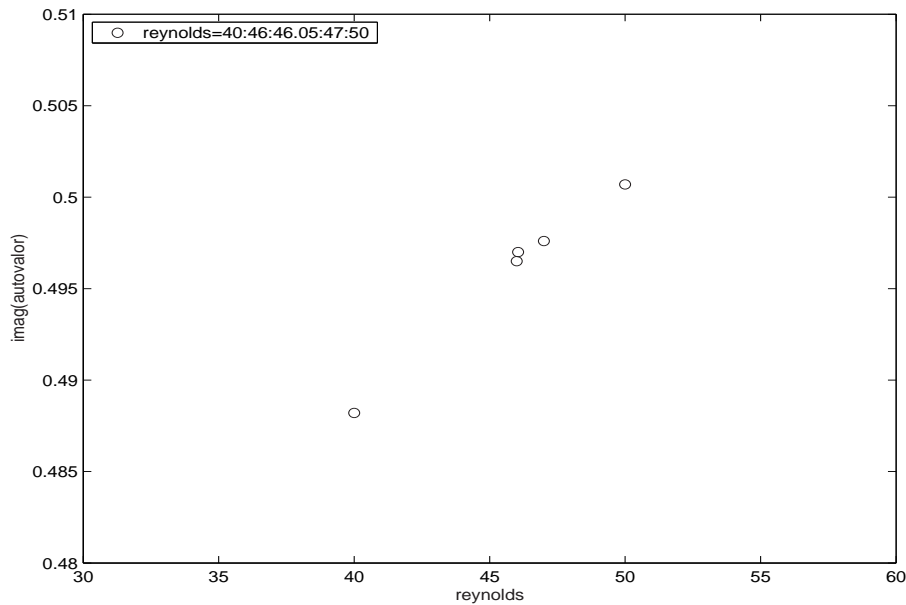


Figura 4: Parte imaginária do autovalor mais significativo.

9. Subespaços solenoidais

Nesta seção serão analisados os subespaços solenoidais que podem ser gerados a partir do elemento quadrático e suas combinações com os elementos lineares que o antecedem, ver Figura (5). Estes elementos lineares são: o elemento linear contínuo ($P1$), o elemento linear contínuo com nó central ($P1^+$), e o elemento linear descontínuo, ($P1^D$).

9.1. Esparsidade

Entende-se por estrutura de esparsidade de um operador a representação visual dos elementos não-nulos da matriz que o representa. A representação visual da esparsidade tem um papel importante em futuras implementações, pois serve como guia de verificação na construção da representação matricial dos operadores. Neste caso particular, a esparsidade é tratada para o operador divergência a partir do emprego de três elementos distintos. A idéia motriz que possibilitou pensar em múltiplos elementos está associada a procura do subespaço minimal, que é capaz de suportar a dinâmica na forma da bifurcação de Hopf.

Construindo o operador divergência discreto para cada uma das combinações do elemento quadrático com os elementos lineares anteriormente nomeados, são obtidos três subespaços solenoidais cada um portando uma estrutura de esparsidade diferente. Esta estrutura pode ser observada na Figura (6). O gráfico da esquerda mostra o padrão de esparsidade do operador divergência discreto, associado a combinação do elemento quadrático, para as velocidades, e ao elemento linear contínuo, $P2P1$, para as pressões. A figura central representa a estrutura de esparsidade da combinação do elemento quadrático com o elemento linear contínuo mais um nó central $P2P1^+$. E finalmente, na terceira figura da direita temos a esparsidade da combinação do elemento quadrático com o elemento linear descontínuo $P2P1^D$.

9.2. Dimensões

Estes subespaços solenoidais, gerados por esta famílias de elementos finitos lineares associados ao elemento quadrático, constituem o conjunto dos subespaços nulos do operador divergência, que é possível gerar seguindo a metodologia da formulação fraca. É nos subespaços solenoidais onde

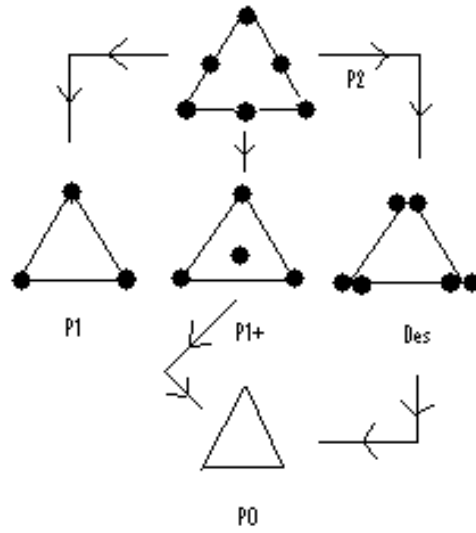


Figura 5: Diagrama para os elementos $P2P1$, $P2P1^+$ e $P2P1^D$.

malha	elementos	$\dim(\mathbf{V}_0^h)$	$\dim(\mathbf{S}_0^h)$	$\dim(\ker(\mathbf{R}_h^T))$
2	196	870	316	431
3	784	3306	1219	1852
4	3136	12882	4789	7634

Tabela 3: Parâmetros das discretizações para o elemento linear e contínuo com nó central, $P2P1^+$

os modelos numéricos procuram as soluções que satisfazem o operador de Navier-Stokes; portanto uma caracterização destes é muito importante.

Aqui é natural perguntar-se como se comporta o problema generalizado de autovalores (estabilidade) em cada um destes subespaços. Felizmente pode-se responder a esta pergunta submetendo cada um destes subespaços ao mesmo estudo de estabilidade. Ao projetar-se as mesmas matrizes jacobiana e de massa em cada um destes subespaços solenoidais, obtém-se três problemas generalizados de autovalores de diferentes dimensões. Na Tabela (3) apresentam-se os principais parâmetros de discretização para a combinação entre o elemento quadrático e o linear contínuo com nó central, $P2P1^+$. A primeira coluna mostra as malhas empregadas na construção do operador divergência. Na segunda, o número de elementos por malha, na terceira a dimensão do espaço da velocidade, na quarta a dimensão do espaço da pressão, e na quinta a dimensão do subespaço solenoidal para esta combinação de elementos em cada uma das malhas. O mesmo para a Tabela (4), que corresponde a combinação do elemento quadrático e o linear descontínuo, $P2P1^D$.

malha	elementos	$\dim(\mathbf{V}_0^h)$	$\dim(\mathbf{S}_0^h)$	$\dim(\ker(\mathbf{R}_h^T))$
2	196	870	588	160
3	784	3306	2352	720
4	3136	12882	9408	3016

Tabela 4: Parâmetros das discretizações para o elemento descontínuo e linear, $P2P1^D$.

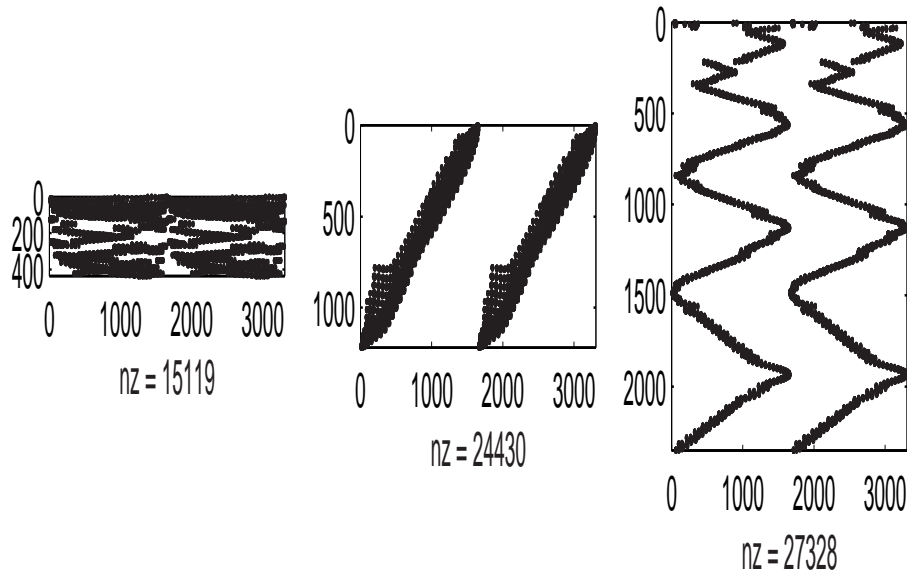


Figura 6: Esparsidade dos operadores divergência: $P2P1$, $P2P1^+$ e $P2P1^D$.

Estas tabelas mostram a relação de crescimento entre o espaço discreto das velocidades \mathbf{V}_0^h e o subespaço solenoidal discreto $\ker(\mathbf{R}_h^T)$, para diferentes combinações de elementos ou pares de interpolação (velocidade-pressão). Sabe-se que, o tamanho do subespaço é fundamental para que suporte ou capture a dinâmica que se pretende projetar nele, (Bathe, 1996; Girault and Raviart, 1986; Gunzburger and Nicolaides, 1993), e a partir destas tabelas pode-se ter uma idéia quantitativa do comportamento do subespaço, a medida que o número de elementos cresce. De todos estes subespaços $P2P1$ é o maior, e o gerado pelo elemento descontínuo, $P2P1^D$, é o menor.

Na figura (7) temos em escala logarítmica a representação das dimensões dos subespaços solenoidais descritos; observando que os três subespaços solenoidais crescem proporcionalmente com as suas dimensões e obedecem a relação

$$\dim(R_{P1^D}^T) < \dim(R_{P1^+}^T) < \dim(R_{P2}^T) \quad (33)$$

que é verificada na figura (7). A relação (33) estabelece uma ordem natural entre os subespaços gerados pelos três tipos de elementos. Como era de se esperar existem três subespaços solenoidais de dimensões decrescentes, nos quais pode-se representar e resolver o problema de estabilidade linear.

Na figura (8) é representado o cálculo do mesmo problema de estabilidade projetado nos três subespaços estudados anteriormente, como se vê as dimensões destes subespaços diferem significativamente. Ao observar os três espectros da figura (8), observa-se que neles a estrutura topológica dos autovalores mais instáveis permanece invariante. Isto leva a pensar que, o subespaço solenoidal construído a partir do operador divergente descontínuo carrega a dinâmica da mesma forma que os subespaços solenoidais com maiores dimensões.

A partir destes cálculos sabe-se que pela via solenoidal com o elemento quadrático nas velocidades e linear nas pressões se atinge no máximo uma redução na ordem de 83 por cento nos graus de liberdade a calcular; com o elemento descontínuo no lugar do linear contínuo esta redução atinge 23 por cento no que diz respeito ao problema generalizado de autovalores. É muito promissor que num subespaço tão pequeno possa-se calcular o problema de estabilidade sem

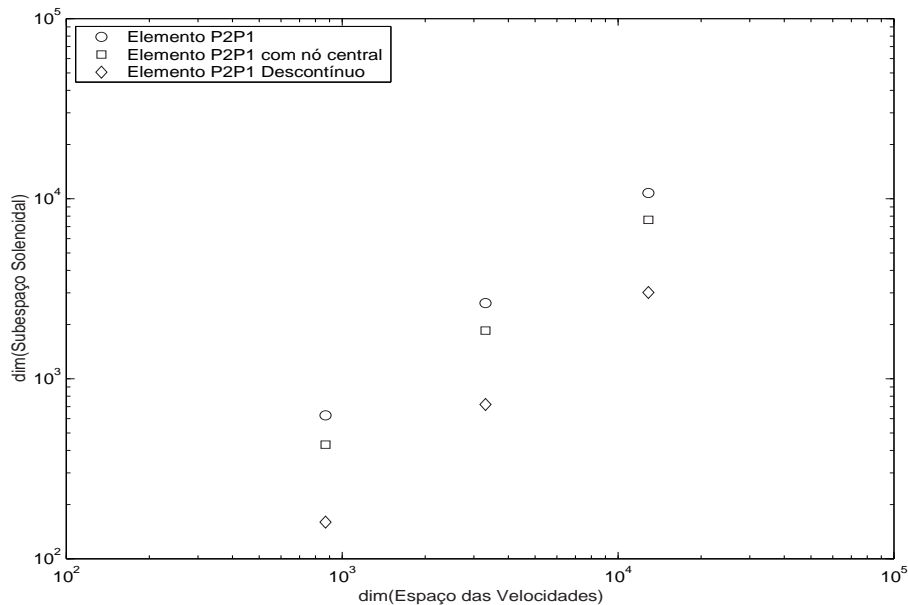


Figura 7: Dimensões dos subespaços solenoidais: $P2P1$, $P2P1^+$ e $P2P1^D$.

grandes modificações na topologia dos autovalores. Esta propriedade que poderia ser denominada de subsistência da dinâmica para o subespaço descontínuo, pode ter extraordinária relevância para cálculos com elevados graus de liberdade.

A tentativa de efetuar este estudo para valores do número de Reynolds elevados esbarra necessariamente com o crescimento dos graus de liberdade do sistema a inverter, e com o aumento das dimensões do subespaço solenoidal, onde o problema generalizado de autovalores é projetado. Nesta situação desagradável em que o sistema discretizado possui dimensões elevadas, ter o controle sob o subespaço menor onde o problema é válido, significa contar com uma ponte onde outros métodos necessariamente falhariam. Acredita-se que esta possibilidade já justifica o estudo destes subespaços e ao mesmo tempo vislumbra uma futura aplicação deles não apenas nos estudos de estabilidade para pequenos valores do número de Reynolds, mas para valores elevados podem tornar-se uma alternativa promissória.

10. Conclusões

Neste capítulo são descritos os principais resultados obtidos neste trabalho. A principal particularidade desta pesquisa está na tentativa de projetar o problema de estabilidade linear, no subespaço solenoidal, e finalmente fazê-lo com sucesso ao capturar a bifurcação de Hopf. O cálculo do campo base, para o estudo da estabilidade a partir de técnicas variacionais e empregando o algoritmo de Usawa é um procedimento bem estudado na literatura (Brezzi and Fortin, 1991; Fortin *et al.*, 1994; Fortin *et al.*, 1997; Maday *et al.*, 1993).

Outro aspecto considerado original e associado ao primeiro ponto, corresponde com a separação do problema de autovalores em simétrico e anti-simétrico. Este último ponto possui um extraordinário interesse para dar continuidade ao processo de capturar a dinâmica das equações de Navier-Stokes, em modelos reduzidos à partir do teorema da variedade central.

Neste trabalho foram obtidos os seguintes resultados:

- Foram estudadas e construídas bases solenoidais discretas para o subespaço nulo do operador divergência empregando a discretização com o elemento quadrático nas

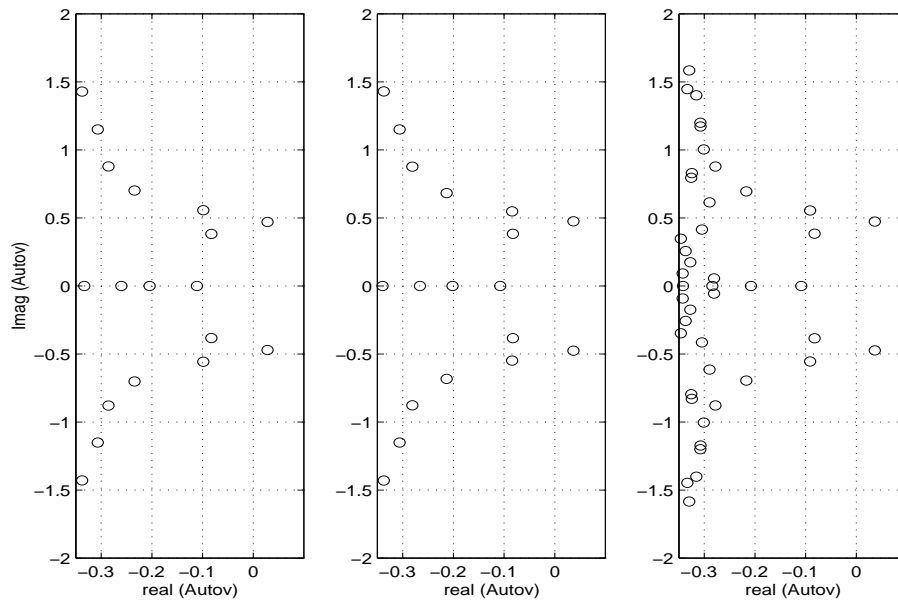


Figura 8: Espectro para os subespaços gerados por $P2P1$, $P2P1^+$, e $P2P1^D$.

velocidades e linear nas pressões de Taylor-Hood, assim como com o elemento linear com nó central, e linear descontínuo nas pressões. Este elemento (Taylor-Hood), cuja popularidade é elevada nos cálculos numéricos para as equações de Navier-Stokes, não tinha sido utilizado para gerar bases solenoidais. O mesmo pode-se dizer dos outros elementos.

- Os campos estacionários foram calculados (solução das equações de Stokes e Navier-Stokes), empregando o algoritmo de Usawa.
- O problema de estabilidade linear foi projetado no subespaço solenoidal discreto, e neste calculou-se o espectro de autovalores.
- Foi possível capturar a bifurcação supercrítica de Hopf no problema generalizado de autovalores no subespaço solenoidal discreto. O Reynolds crítico obtido foi de $Re_C = 47,5$, e o número de Strouhal, $S_t = 0,1374$.
- Os subespaços solenoidais que podem ser construídos a partir do elemento quadrático em combinação com elementos lineares foram caracterizados, e suas dimensões calculadas.

Os pontos mencionados estabelecem o roteiro seguido nesta pesquisa, para atingir os objetivos propostos. Duas janelas científicas têm permitido o surgimento deste trabalho:

- Os subespaços solenoidais discretos têm sido explorados timidamente como via aceitável, para estudar as soluções numéricas das equações de Navier-Stokes.
- O baixo Reynolds crítico da bifurcação de Hopf no escoamento ao redor de um cilindro cria uma vantagem sutil, para o estudo do problema de estabilidade linear, pela via solenoidal. Pois a dinâmica é factível de ser capturada sem grandes gastos em discretização, para pequenos Reynolds: isto não acontece na cavidade onde as bifurcações surgem em Reynolds mais elevados (Fortin *et al.*, 1994; Fortin *et al.*, 1997).

Referências

- Anderson, E., Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney and D. Sorensen (1999). Lapack user's guide third edition. www.netlib.org.

- Aranha, J.A.P. (2001). On the stability of steady symmetric flow around a circular cylinder. *Private Communication* **1**, 1–21.
- Batchelor, G.K. (1990). *An Introduction to Fluid Dynamics*. 3 ed.. Cambridge University Press, New York.
- Bathe, K.J. (1996). *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Berger, E. and R. Wile (1972). Periodic flow phenomena. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **4**, 313.
- Brezzi, F. and M. Fortin (1991). *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics.
- Chen, J.H., W.G. Pritchard and S.J. Tavener (1995). Bifurcation for flow past a cylinder between parallel planes. *J. Fluid Mech.* **284**, 23–41.
- Cuvelier, C., A. Segal and A.A. van Steenhoven (1986). *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*. D. Reidel Publishing Company, Boston.
- Ding, Y. and M. Kawahara (1999). Three-dimensional linear stability analysis of incompressible viscous flows using the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **31**, 451–479.
- Fortin, A., M. Jardak, J.J. Gervais and R. Pierre (1994). Old and new result on the two-dimensional poiseuille flow. *Journal of Computational Physics* **115**, 455–469.
- Fortin, A., M. Jardak, J.J. Gervais and R. Pierre (1997). Localization of hopf bifurcations in fluid flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **24**, 1185–1220.
- Georgescu, A. (1985). *Hydrodynamic stability theory*. Martinus Nijhoff Publishers, Boston.
- Gervais, J.J., D. Lemelin and R. Pierre (1997). Some experiments with stability analysis of discrete incompressible flows in the lid-driven cavity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **24**, 477–492.
- Girault, V. and P.A. Raviart (1986). *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Vol. 5. Springer Series in Comp. Mathematics.
- Gresho, P.M., S.T. Chan, R.L. Lee and Upson C.D. (1984). A modified finite element method for solving the time-dependent incompressible navier-stokes equations: Part 2. applications. *Int. J. Numer. Methods Fluids* **4**, 619.
- Gunzburger, M. D. and R. A. Nicolaides (1993). *Incompressible Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- Jackson, C.P. (1987). A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *J. Fluid Mech.* **182**, 23–45.
- Joseph, D.D. (1985). *Hydrodynamic Stability and Bifurcation*. Springer-Verlag, New York.
- Landau, L. and Lifschitz (1959). *Fluid Mechanics*. Oxford: Pergamon.
- Lehoucq, R.B., D.C. Sorensen and C. Yang (1997). Arpack user's guide: Solution of large scale eigenvalue problems with implicit restarted arnoldi methods.. arpack@caam.rice.edu.
- Maday, Y., D. Meiron, A.T. Pateras and E.M. Ronquist (1993). Analisis of iterative methods for the steady and unsteady stokes problem: Application to spectral element discretizations. *SIAM J. SCI. COMPUT.* **14**(2), 310–337.
- Meneghini, J.R. (2002). Projetos de pesquisa no tópicos geração e desprendimento de vórtices no escoamento ao redor de cilindros. *Resenha para o título de Livre-Docente, São Paulo*.

- Morzynski, M. and F. Thiele (1991). Numerical stability analysis of a flow about a cylinder. *Z. Angew. Math. Mech.* **71**, T424–T428.
- Noack, B.R. and B.R. Eckelmann (1994). A global stability analysis of the steady and periodic cylinder wake. *J. Fluid Mech.* **270**, 297–330.
- Poliashenko, M. and C.K. Aidun (1995). A direct method for computation of simple bifurcations. *Journal of Computational Physics* **121**, 246–260.
- Provansal, M., C. Mathis and L. Boyer (1987). Bernard-von karman instability: transient and forced regimes. *J. Fluid Mech.* **182**, 1–22.
- Williamson, C.H.K. (1989). Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **206**, 579–627.
- Winters, K.H. (1991). Bifurcation and stability: a computational approach. *Computer Physics Communications* **65**, 299–309.
- Zienkiewicz, K.J. and R.L. Taylor (1991). *The Finite Element Method*. Vol. 2. 4 ed.. New York: McGraw Hill.